



Глава 5 Дополнительные материалы

— Введение —

Если вы один из тех, кто хотел бы, чтобы в кратких описаниях уроков было больше примеров, обсуждений и комментариев — вы попали в нужное место! Этот файл содержит дополнительные материалы к некоторым заданиям из пятой главы.

Здесь вы найдёте множество решённых примеров головоломок, а также пояснения к их решениям. Программа Early Family Math основана на концепции, согласно которой раннее математическое развитие должно происходить в семейной среде, и составление головоломок для ребёнка является важной частью этого процесса. Как только вы разберётесь, как решать каждую из них, вы увидите, что большинство из них (если не все) вы сможете с лёгкостью составлять сами.

Многие из этих головоломок имеют разные уровни сложности, и на следующих страницах представлено множество рекомендаций и примеров по их созданию. Всегда начинайте с самых простых головоломок. Гораздо лучше, если ваш ребёнок будет испытывать удовольствие, успех и понимание, разгадывая простые головоломки, чем столкнется с трудностями и разочаруется при попытке решить сложные задачи. Как только ребёнок почувствует уверенность и заинтересуется математикой, можно постепенно переходить к более сложным задачам.

Также важно помнить, что не все головоломки будут интересны каждому, поэтому нет необходимости решать задания, которые кажутся неинтересными или не вызывают отклика.

Вот что вы найдёте на следующих страницах:

- **Глава 5 — Ним с множителями**
- **Глава 5 — Решето Эратосфена**
- **Глава 5 — Рычаги и система рычагов**
- **Глава 5 — Деление коробки**
- **Глава 5 — Головоломки с заменой букв**
- **Глава 5 — Исследования — Игра с фигурами**
- **Глава 5 — Игра на произведения**
- **Глава 5 — Ограниченные калькуляторы**
- **Глава 5 — Двойной риск**

— Юридические материалы —

Каждая семья должна иметь возможность вместе изучать математику и получать от неё удовольствие. С этой целью Early Family Math представляет собой сборник материалов, которые семьи и преподаватели могут свободно редактировать, переводить, копировать и распространять, не спрашивая разрешения, только для некоммерческого использования.

© Copyright Early Family Math - Chris Wright 2026 v. 1.1 Creative Commons: Attribution-NonCommercial 4.0 Международная лицензия

Глава 5 — Ним с множителями

— Введение —

Начните с любого числа, например с 20. Пусть ребёнок решит, ходить ему первым или вторым. Во время своего хода игрок может вычесть любой делитель числа. Игрок, который достигает 0, проигрывает.

— Анализ —

Наиболее эффективная стратегия изучения этой игры — рассмотреть упрощенную версию, что в данном случае означает, что следует начать с более маленьких чисел. Если это ваш ход и вам выпало одно из следующих чисел, то произойдет следующее: 1 — проигрыш, 2 — выигрыш, 3 — проигрыш, 4 — выигрыш, 5 — проигрыш, 6 — выигрыш, 7 — проигрыш, 8 — выигрыш. Если по окончании игры ваш ход, и у вас осталось нечётное число — вы проиграли; если чётное — вы выиграли.

Подобрать выигрышную стратегию — уже большой шаг, но давайте углубимся. Почему это работает? Какие свойства чётных и нечётных чисел приводят к такому исходу? Задайте этот вопрос своему ребёнку и дайте ему время для размышления. Не спешите: этот процесс «борьбы» не оценим, его нельзя прерывать.

Эксперименты с небольшими числами быстро проясняют, что происходит. Если у вас нечётное число, то все делители нечётные, поэтому при вычитании любого делителя результатом будет чётное. Следовательно, нечётные числа на одном ходу всегда приводят к чётным числам на следующем. Чётные числа всегда имеют как нечётные, так и чётные числа в качестве делителей. Поэтому ситуация не всегда одинакова. Однако если у вас чётное число, ваша цель — дать оппоненту нечётное число, и есть простой способ сделать это — выбрать делитель 1 и вычесть его!

3) Какое последнее простое число имело новый полезный X в своем ряду на данной схеме?

На этой схеме простые числа с полезными X равны 2, 3 и 5. Все числа, кратные 7 и 11 — уже отмеченные ранее X . Если вы посмотрите ответ на последний вопрос, вы увидите здесь ответ. Единственный способ получить новые X — умножить простое число на простые числа, большие или равные самим себе. Как только мы достигаем такого простого числа, как 7, где $7 \times 7 > 25$, нам не нужно его проверять. Итак, нам нужно только проверить простые числа, квадрат которых меньше или равен последнему числу.

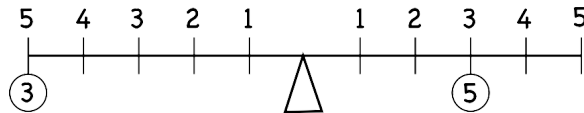
4) Если бы вам дали число, скажем, 53, на какие простые числа вам нужно было бы разделить его, чтобы увидеть, что оно простое?

От ответа на последний вопрос нам нужно только проверить простые числа, квадрат которых меньше или равен 53. Эти простые числа — 2, 3, 5 и 7. Ни одно из них не делит 53 нацело, поэтому 53 просто обязано быть простым!

Глава 5 — Рычаги и система рычагов

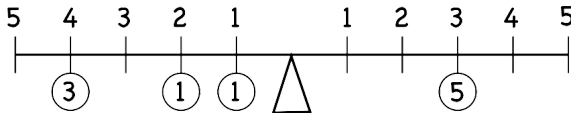
— Рычаги —

Принцип рычага гласит, что сила, действующая на одну сторону рычага под действием массы, равна массе, умноженной на ее расстояние от центра вращения — точки опоры.



В рычаге выше — груз массой 3 слева, который находится на расстоянии 5 единиц от точки опоры, поэтому его сила составляет $3 \times 5 = 15$. Груз справа, масса которого 5, находится на расстоянии 3 единицы от точки опоры, поэтому его сила равна $5 \times 3 = 15$. Этот рычаг уравновешен.

Если на одной из сторон больше одного груза, силы складываются.



В этом рычаге $3 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 15$ с левой стороны и $5 \times 3 = 15$ с правой стороны. Рычаг уравновешен.

Мы ограничимся использованием лишь целых чисел для таких задач. Вы можете решить сами, будут ли несколько весов подвешены в одной и той же точке — в последующем обсуждении мы рассмотрим такой вариант, как возможный.

— Головоломки с рычагом —

У вас есть груз массой 3 и 5, которые нужно разместить на противоположных сторонах от точки опоры. Где они должны быть расположены, чтобы быть в равновесии? Ответом на это могут быть расстояния в 5 единиц и 3 единицы, но также могут быть 10 и 6 или даже большие числа, такие как 15 и 9. Будьте открыты для обсуждения всего того, что придумает ваш ребёнок.

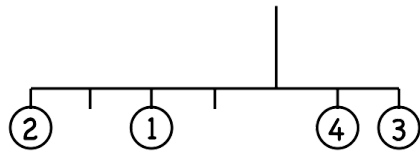
Если у вас есть грузы 3 и 5 с одной стороны рычага, то какие будут с другой, и на каком они будут расстоянии, чтобы уравновесить рычаг? Этот вопрос продолжает тему со страницы «Важный счёт» в конце главы 4. Как и раньше, пробуйте различные комбинации весов. Что произойдет, если 3 и 5 заменить на 4 и 5, 4 и 9 или 6 и 9?

Как изменится эта задача, если мы поместим грузы по 3 и 5 единиц по разные стороны от точки опоры? Теперь легко взвесить груз с массой 1, используя $3 \times 2 = 5 \times 1 + 1 \times 1$. Какие ещё грузы вы можете взвесить таким образом?

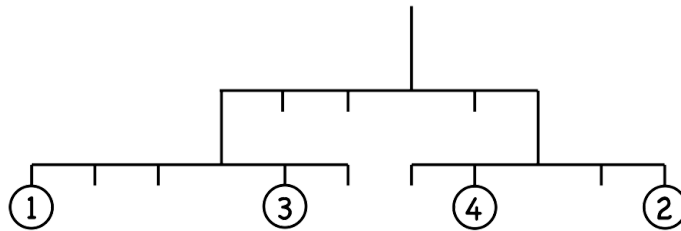
— Системы рычагов —

Вам даются определенные грузы и схема системы рычагов с некоторыми точками крепления. Задача в том, чтобы разместить не более одного груза на точку крепления, и добиться равновесия в каждом плече рычага. Для решения этих проблем предположим, что перекладины, из которых состоит система рычагов, невесомы. Каждое плечо — рычаг, который необходимо уравновесить, поэтому эти головоломки являются продолжением темы равновесия рычагов — попробуйте решить такие головоломки, прежде чем приступить к другим.

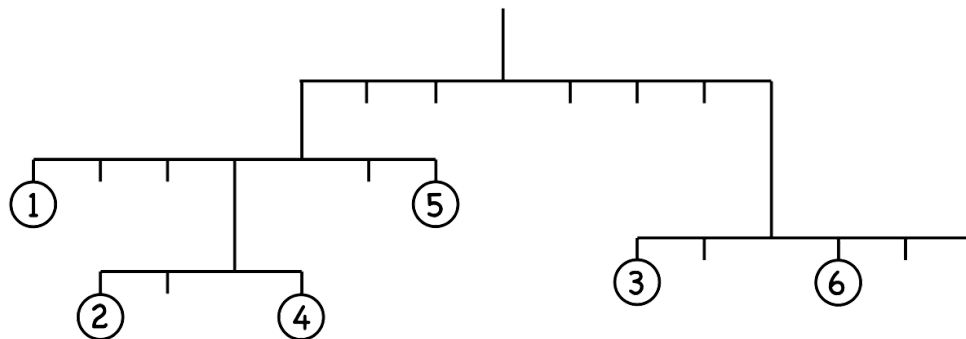
Начните с самых простых систем, которые — просто рычаги в воздухе. Вот решение, как расположить грузы с массой от 1 до 4, чтобы уравновесить рычаг. Система работает по принципу рычага, где точка опоры находится в точке подвеса. В этой системе рычагов имеем $2 \times 4 + 1 \times 2 = 4 \times 1 + 3 \times 2$.



Если конструкция имеет больше одного уровня, то каждое отдельное плечо должно быть уравновешено на каждом уровне, как и сам рычаг. В случае следующего мобиля, два нижних плеча уравновешены, потому что $1 \times 3 = 3 \times 1$ и $4 \times 1 = 2 \times 2$. Для вычисления уровня выше достаточно просто сложить массу под ним. Например, вес на левой стороне равен $1 + 3 = 4$ — что касается верхнего уровня, не имеет значения, где на этом нижнем рычаге расположены грузы. Итак, для следующего уровня $(1 + 3) \times 3 = (4 + 2) \times 2 = 12$, так что верхний уровень также уравновешивается.



Развлекайтесь, собирая мобильные головоломки. Вот последний вариант, с которым можно поиграть, используя каждое из чисел от 1 до 6. Не беспокойтесь о том, чтобы придумать что-то необычное и использовать каждое число лишь раз. Любая завершенная головоломка доставит радость. Проверив уровни, имеем: $2 \times 2 = 4 \times 1$; $1 \times 4 + (2 + 4) \times 1 = 5 \times 2$; $3 \times 2 = 6 \times 1$; и $(1 + 2 + 4 + 5) \times 3 = (3 + 6) \times 4$.



Глава 5 — Деление коробки

— Введение —

Прямоугольник размером 4 на 4 или больше, с числами в некоторых квадратах, предназначен для деления на более мелкие прямоугольники. Каждое число должно оказаться в отдельном прямоугольнике, площадь которого соответствует этому числу.

Взрослым такие задачи даются довольно легко. Возьмите прямоугольник, разделите его на прямоугольники поменьше, напишите числа для обозначения площади в каждом из них, а затем уберите разметку. Единственная сложная часть — это расставлять числа в местах, которые делают головоломку очевидно простой — вы всегда можете давать подсказки по мере необходимости, если ваша головоломка окажется слишком сложной.

— Стратегии решения —

Вот несколько основных стратегий, которые могут упростить решение этих головоломок. Сделайте все возможное, чтобы ваш ребёнок узнал о них, играя в головоломку. Вместе составьте список стратегий, которые он придумает.

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

1) Посмотрите на числа с одним или двумя вариантами прямоугольников.

Обе 4 сильно ограничены. Каждая 4 может быть только внутри прямоугольника 1 на 4 или 2 на 2. Верхние 4 зажаты, поэтому они не могут быть внутри прямоугольника 1 на 4. Соответственно, в верхнем левом углу должен быть прямоугольник 2 на 2. В результате, остается только нижняя 4 с единственным вариантом исхода — прямоугольник будет проходить по нижней стороне и иметь площадь 1 на 4.

2) Посмотрите на простые числа — они должны быть внутри прямоугольника 1 на «n».

Тройки в головоломке выше должны находиться в прямоугольнике размером 1 на 3. Цифра 3 в правом верхнем углу может быть только частью прямоугольника 1 на 3, идущего вдоль верхнего края или правой стороны. Верхний левый квадрат 2 на 2, заблокированный для 4, делает невозможным размещение прямоугольника 1 на 3 вдоль верхнего края.

Прямоугольник 1 на 4, находящийся снизу, вынуждает нижний, с площадью 1 на 3 занять верхнее из двух возможных вертикальных положений.

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6	2	
				3	5
	6				
		5			
	4		2		

		3	6	2	
				3	5
	6				
		5			
	4		2		

3) Числа, близкие к максимальной величине, часто имеют несколько вариантов.

Посмотрите на цифры 6 и 5 в следующей задаче. Самым верхним 6 нужно много места, и единственный способ получить достаточно места — расположиться вертикально вниз, занимая всю колонну. Остальные 6 не могут быть 1 x 6, потому что ряд был ограничен столбцом другой 6. Поэтому нижняя 6 должна быть размером 2 x 3, что ещё неточно.

В качестве другого примера, если бы в этой головоломке была цифра 8, вариант 1 на 8 не подошел бы, поэтому она могла бы быть только частью прямоугольника 2 на 4.

4) У квадратов, заключенных в рамку, есть несколько вариантов.

Верхняя 5 заключена в прямоугольную рамку, поэтому единственный вариант — быть в столбце с 5 ячейками. Оставшаяся 5, поскольку это тоже простое число, должна располагаться вертикально или горизонтально. Она перекрыта по горизонтали столбцом цифры 6, поэтому этот прямоугольник должен располагаться вертикально вверх, прямо под 3.

5) Углы часто сильно ограничены.

Число 2 в правом верхнем углу должно располагаться горизонтально, чтобы его было легко заполнить.

Глава 5 — Головоломки с заменой на буквы

— Введение —

Как только ваш ребёнок научится решать головоломки с пропущенными числами, несколькими страницами ранее в этой главе, он может начать разбираться с этими головоломками. В них одна или несколько цифр заменены буквами. Три правила для букв:

- Буква всегда равна одному и тому же числу.
- Самая левая цифра числа никогда не равна 0.
- Разные буквы должны быть разными цифрами.

Создавайте эти головоломки, беря пример на сложение или вычитание и заменяя одну или несколько цифр. Такие задачи также могут быть составлены, чтобы ваш ребёнок попытался найти интересные решения. Обратите внимание, что значения букв должны изменяться от головоломки к головоломке.

— Примеры —

Данный ниже пример показывает, как вы можете взять стандартную задачу на сложение или вычитание и составить из нее головоломку с заменой цифр на буквы. В первом варианте все 6 заменены на А, а во втором 2 заменены на В.

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \quad \dashrightarrow \quad \begin{array}{r} 23 \quad B3 \\ +4A \quad +4A \\ \hline A9 \quad A9 \end{array}$$

Остальные примеры тщательно построены таким образом, чтобы обеспечить решение с использованием свойств конкретной ситуации. Следует отметить одно свойство: когда вы складываете два числа, перенос в следующий столбец всегда равен либо 0, либо 1. Так, например, в задаче $A + A = C4$, С не может быть 0, и, соответственно, оно равно 1.

$$\begin{array}{r} B \quad B \quad A \quad A \quad D \quad A \\ +8 \quad +B \quad +A \quad +2 \quad +2 \quad +B \\ \hline C \quad 8 \quad C4 \quad BC \quad EE \quad AC \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A \quad C \quad A \quad A \\ A \quad C \quad A \quad A \quad A \quad B \\ +A \quad +C \quad +7 \quad +B \quad +BB \quad +AB \\ \hline B2 \quad D4 \quad B \quad B0 \quad A7 \quad BA \end{array}$$

$$\begin{array}{r} BA \quad AD \quad AA \quad AA \quad AA \quad AA \\ +BB \quad +BD \quad +BA \quad +CB \quad +AB \quad +AA \\ \hline CAB \quad BCC \quad BBC \quad BBC \quad CAC \quad BBC \end{array}$$

Мы достигли этого небольшими шагами, но это ОГРОМНЫЙ результат. Это означает, что мы можем начать анализ любой схемы стола, сначала удалив любой общий множитель.

Продолжаем с того места, где мы остановились — на схемах 2 на «n». Мы понимаем, что происходит, когда «n» чётно, но что же происходит, когда «n» нечётно? Что происходит со столом 2 на «n» при $n = 1, 3, 5, 7$ и т. д. ? Становится легко заметить закономерность.

Результат: когда «n» нечётно, схема 2 на «n» имеет «n» отскоков и останавливается в верхнем левом углу.

Мы уже достигли большого прогресса. Работа с большим количеством примеров приводит к открытию ещё нескольких закономерностей.

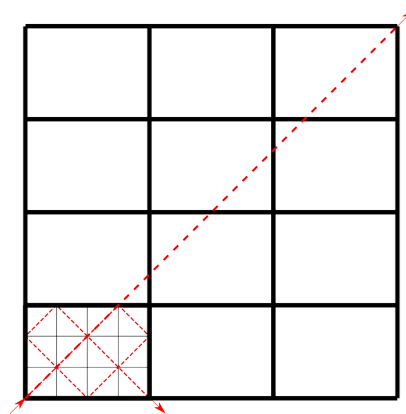
Результат: если «n» не кратно 3, стол 3 на «n» имеет $n + 1$ отскоков и заканчивается в верхнем правом углу, если «n» имеет остаток 1 при делении на 3, и в правом нижнем углу, если «n» имеет остаток 2 при делении на 3. Если «n» нечётное, стол 4 на «n» имеет $n + 2$ отскоков и заканчивается в верхнем левом углу. Если «n» не кратно 5, стол 5 на «n» имеет $n + 3$ отскоков и заканчивается в верхнем правом углу, когда «n» нечётно, и в нижнем правом углу, когда «n» чётно.

На этом этапе у нас возникает соблазн просмотреть данные, увидеть некоторые закономерности и выдвинуть некоторые предположения.

Гипотеза: предположим, что «k» и «n» не имеют общих множителей. Тогда стол «k» на «n» будет иметь $k + n - 2$ отскока. Он остановится в верхнем левом углу, если «k» чётно, в верхнем правом углу, если «k» и «n» нечётные, и в правом нижнем углу, если «k» нечётное, а «n» чётное.

Ух ты, если эта гипотеза верна, мы полностью решили эту задачу! Вы уже догадываетесь, к чему это ведёт... Давайте посмотрим, сможем ли мы объяснить, почему это предположение должно быть верным (или выясним, что оно ложно).

Хотя есть и другие способы разобраться в этой ситуации, однако, как это иногда бывает, задачу намного легче понять, благодаря новой идее. Возможно, это не самая очевидная идея, но как только вы увидите, то, вероятно, будете поражены. Идея состоит в том, чтобы развернуть стол так, чтобы мяч мог лететь по прямой! Вот что произойдёт, если мы развернем исходный стол 3 на 4 и сделаем так, чтобы мяч катился по прямой.



Убедиться в том, что гипотеза верна, теперь намного проще. Отскоки соответствуют пересекающимся линиям — всего $(k - 1)$ из них пересекаются в одном направлении, и $(n - 1)$ из них пересекаются в другом направлении, так что вместе получается $(k - 1) + (n - 1) = k + n - 2$ пересечений линий. Для того чтобы увидеть то, в каком углу окажется мяч, нужно отследить его движение. Итак, мы закончили наше путешествие по решению этой головоломки.

— Заполнение областей фигурами — Введение —

Предположим, у вас есть шахматная доска 8 на 8 и коллекция плиток 1 на 2. Найти способ точно покрыть шахматную доску 32 такими плитками размером 1 на 2 достаточно просто.

Давайте начнем убирать с доски несколько квадратов и посмотрим, что получится. Если вы избавитесь от одного угла шахматной доски, вы сразу поймете, что вы больше не можете покрывать шахматную доску плитками, потому что плитки всегда будут покрывать чётное количество квадратов, а теперь осталось 63 квадрата, которые нужно покрыть. Хорошо, избавьтесь от двух углов, чтобы получить чётное количество оставшихся квадратов. Возможно ли покрыть доску теперь? Ответ зависит от того, какие два угла вы уберете. Почему? Что, если вы не будете больше ограничивать себя в удалении углов, что произойдет в этом случае?

— Заполнение областей формами — Анализ —

Позвольте своему ребёнку поиграть с этим, прежде чем раскрывать идею раскраски. Если они поиграют с небольшими досками, они смогут выяснить правила самостоятельно, а это всегда лучше.

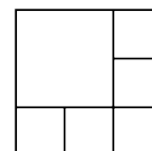
Наблюдение, которое очень помогает в этом вопросе — это использование цветов квадратов шахматной доски. Если вы возьмете плитки 1 на 2 и покрасите один квадрат в белый, а другой в черный, вы увидите, что происходит интересная вещь. Каждая плитка должна покрывать квадрат каждого цвета. Мало того, что к плиток покроют $2k$ квадратов, они будут покрывать k белых квадратов и k черных квадратов — одинаковое количество квадратов каждого цвета. Используя эту идею, становится очевидным, что если вы удалите больше квадратов одного цвета, чем другого, то покрыть доску плитками будет невозможно.

Если вашему ребёнку нравятся эти вопросы, начните использовать другие формы для заполнения доски. Поиграйте с заполнением его плитками размером 1 на 3 или 3 квадратами в форме буквы Г. Какие закономерности и правила вы обнаружите с их помощью? С какими ещё фигурами может быть интересно поиграть?

— Заполнение квадратов квадратами — Введение —

Какими способами вы можете заполнить квадрат другими квадратами, при том, что другие квадраты не обязательно должны быть одинакового размера? Однако, длины не могут быть абсолютно случайными числами — длина стороны каждого квадрата должна быть целым числом, кратным фиксированной длине. Вопрос для исследования: Каково максимальное количество возможных квадратов? Кроме того, если вы знаете, что какое-то количество возможно, есть ли простой способ описать, как это сделать?

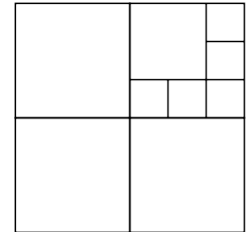
Пусть ваш ребёнок играет в это много дней — не торопитесь с ответом. Есть много разных способов придумать идеи для этого исследования, поэтому подстраивайтесь и работайте с идеями вашего ребёнка. Вот диаграмма, показывающая вариант с 6.



Придумывать несколько быстрых примеров — всегда хорошая идея. Для начала, разбейте большой квадрат на квадраты одинакового размера. Из этого вы узнаете, что квадратные числа (1, 4, 9, 16, 25, ...) работают.

Работая с примером с шестью квадратами, мы можем использовать один большой квадрат любого размера и положить квадраты 1 на 1 на обе его стороны. Проделав это для больших квадратов (1 на 1, 2 на 2, 3 на 3,...), мы получим $1 + 3 = 4$, $1 + 5 = 6$ (как показано на рисунке), $1 + 7 = 8$, $1 + 9 = 10$, и так далее. То же самое можно сделать со всеми чётными числами, начинающимися с 4.

Мощная идея, которая быстро объясняет это, состоит в том, чтобы увидеть, что мы можем взять диаграмму которая подходит, и заменить один из ее квадратов другой диаграммой, которая тоже подходит. Так, например, если вы возьмете квадрат 2 на 2, заполненный 4 квадратами 1 на 1, и замените один из этих квадратов 1 на 1 примером с 6 квадратами (приведенным ранее), вы получите диаграмму, показанную справа, с 9 квадратами.



Поскольку один квадрат заменяется диаграммой из «n» квадратов, итоговое изменение количества квадратов состоит в добавлении n-1 из них. Это означает, что мы можем взять одно подходящее число и прибавить к любому другому действующему числу кратное на единицу меньше этого числа. В частности, мы можем добавить кратные $4-1 = 3$ к любому другому числу, которое работает. Легче всего добавить 3 к чётным числам, начиная с 4.

Если сложить всё вместе, то можно сказать, что числа 1, 4, 6, 7, 8, 9... подходят, и можно с легкостью увидеть хотя бы один способ получить их. Также легко убедиться, что числа 2, 3 и 5 невозможны.

Если вашему ребёнку нравится изучать этот вопрос, изучите варианты на эту тему. Предположим, вы разрешаете только квадраты определенных размеров — например, 1 на 1, 2 на 2 и 3 на 3. Или, возможно, используйте только 2 на 2 и 3 на 3. Выясните какие вопросы приводят к интересным решениям.

Ещё один вариант, который стоит рассмотреть — заполнение других фигур фигурами той же формы. Например, задайте тот же вопрос к правильным треугольникам (треугольники, у которых все стороны равны). Некоторые цифры интересно исследовать таким образом, а некоторые совсем неинтересно — какие?

Глава 5 — Игра на произведение

— Введение —

Используйте один лист бумаги, заполненный следующим образом:

Первый игрок перемещает жетон на любое число от 1 до 9 в квадратах 1–9 в нижнем ряду. Второй игрок кладет ещё жетон на один из квадратов 1–9 в нижнем ряду и забирает произведение в сетке 6 на 6. С этого момента каждый игрок должен переместить один из двух жетонов и забрать произведение (если могут). Выигрывает тот игрок, который первым заберет произведение трёх клеток подряд. Смешайте номера произведений в таблице 6 на 6, чтобы ваш ребёнок лучше научился определять произведения.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Эти игровые доски могут быть сделаны сколь угодно большими, хотя они довольно быстро становятся большими. Вот несколько больших схем с соответствующими диапазонами большего числа под ними.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	60	63	64	
70	72	80	81	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

Квадраты с красными звездами являются «свободными» квадратами и могут использоваться любой стороной по мере необходимости.

Глава 5 — Калькуляторы с ограниченным набором функций

— Введение —

Предположим, у вас есть сильно сломанный калькулятор, и вам нужно получить какой-то результат на калькуляторе. Вы можете придумать самые разные сценарии, которые могут предложить интересные задачи с кратким описанием головоломки. В эту игру легко играть в устной форме, когда у вас есть свободная минута. Вот несколько примеров, с которых можно начать.

Хотя бывают моменты, когда в этих вопросах используется более глубокая математика, в основном это задачи, предназначенные исключительно для забавы поиграть с ними.

1а) Предположим, у вас есть калькулятор с +, -, x и /, но есть только одна рабочая цифровая клавиша — 4. Можете ли вы получить 21? Если да, то какое наименьшее количество шагов вам потребуется?

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4/4 = 21$ — это один способ, но есть много других способов сделать это. Другой — $4 \times (4 + 4/4) + 4/4$. Цель состоит в том, чтобы поиграть и получить удовольствие от исследования.

1b) Предположим, вы могли бы использовать 4 не более четырех раз — какие числа вы могли бы получить? Предположите, что бы случилось, если бы вам пришлось использовать 4 ровно четыре раза.

По мере увеличения математических ресурсов ребёнка задача четырех четверок превращается в забавную головоломку. На данный момент выбор вашего ребёнка весьма ограничен, но играть с ним по-прежнему очень весело. Будет особенно сложно выполнить многие числа без деления или использования десятичных знаков. Не беспокойтесь о том, чтобы придумывать все числа по порядку — просто придумывайте как можно больше разных чисел.

Вот несколько примеров для начала.

$$1 = (4/4) \times (4/4) = 44/44$$

$$2 = 4 / ((4 + 4) / 4)$$

$$3 = (4 + 4 + 4) / 4$$

$$4 = (4-4) \times 4 + 4$$

$$6 = 4 + (4 + 4) / 4$$

$$7 = 44/4 - 4$$

$$8 = (4 + 4) \times (4/4) = 4 + 4 + 4-4$$

$$32 = 4 \times 4 + 4 \times 4$$

1с) Поиграйте с другими одиночными числами и получите другие результаты.

2а) Предположим, ваш калькулятор может складывать только 4 или 7. Какие числа вы можете получить?

Это результат, который мы уже видели несколько раз. Начиная с $(4-1) \times (7-1)$, вы можете получить все числа, сложив числа, кратные 4 и 7. $18 = 2 \times 7 + 4$, $19 = 3 \times 4 + 7$, $20 = 5 \times 4$, $21 = 3 \times 7$ и т. Д.

2б) Предположим, у него есть 4 или 7, но он может складывать и вычитать. Какие числа вы могли бы получить?

Таким образом можно получить все числа.

2с) Замените 4 и 7 другими парами чисел. Что происходит с этими парами?

В теории чисел это называется теоремой Безу. Результат говорит о том, что, комбинируя кратные двух чисел, вы можете получить любое кратное наибольшему общему делителю этих двух чисел.

3) Предположим, у вас есть только 1 ключ, и вы можете только добавлять или удваивать. Например, $2 \times (2 \times 1) + 1$ равно 5. Какие ещё числа вы можете создать?

Это связано с двоичной записью чисел. Вашему ребёнку не важно понимать это, чтобы просто играть. Любое число можно записать в двоичном формате, поэтому все числа могут быть получены путем чередования удвоения и прибавления 1. Например, 21 равно $16 + 4 + 1$. Итак, $21 = 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times 1) + 0) + 1) + 0 + 1$.

Глава 5 — Двойной риск

— Введение —

Игроки начинают игру, тайно выбирая 5 различных чисел больше 20 и не больше 120. После того, как они выбраны, они записываются там, где все могут увидеть их. С помощью цифровых карточек или другого устройства создается случайное число от 1 до 20. Это число многократно удваивается до тех пор, пока чье-либо число не выпадет в первый раз или число не станет больше 120. Первый игрок, у которого выпадут все пять чисел, становится победителем.

— Анализ —

Возникает вопрос: какие пять чисел лучше выбрать? Вот несколько идей, над которыми стоит подумать.

Правило: всегда выбирайте число от 1 до 20, умноженное на 2.

Если вы выберете такое число, как 23 или 46, оно никогда не выпадет, и вы гарантированно проиграете.

Правило: никогда не выбирайте число, которое вдвое больше числа, которое вы могли бы выбрать, но не сделали.

Если вы выбрали 44, почему бы вместо этого не выбрать 22? Если другой человек выберет 22, вы пропустите ход.

Дальнейший анализ: с одинаковой вероятностью будут выбраны числа от 1 до 20. Однако, поскольку 9 ведет к 18, вероятность 18 в два раза выше, чем, скажем, 11. Если вы учитываете все возможные начальные значения, стартовые точки будут иметь следующие вероятности:

11 - 1/20 (из 11)

12 - 3/20 (из 3, 6 и 12)

13 - 1/20 (из 13).

14 - 2/20 (из 7 и 14)

15 - 1/20 (из 15)

16 - 5/20 (из 1, 2, 4, 8 и 16)

17 - 1/20 (из 17)

18 - 2/20 (из 9 и 18)

19 - 1/20 (из 19)

20 - 3/20 (из 5, 10 и 20)

Очевидно, что лучше всего использовать числа, кратные 16, 12 и 20. Простая стратегия состоит в том, чтобы использовать пять чисел: 32, 64, 24, 48 и 40. Эти числа не всегда будут выигрывать, но со временем они должны вам помочь.